PD Emanuel Scheidegger
B. Sc. Thomas Spittler
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Übungsblatt 10

Differentialgleichungen für Modulformen

37. Einige Transformationsformeln der Ramanujan– und Maass–Ableitung.

   (a) (2 Punkte) Sei $f \in M_k(\Gamma_1)$. Zeigen Sie, dass gilt:

   $$D^n f = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \frac{(k+r)_{n-r}}{(4\pi y)^{n-r}} \partial^r f$$

   für alle $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$.

   (b) (2 Punkte) Sei $f \in \widetilde{M}_k^{(\leq p)}(\Gamma_1)$. Zeigen Sie, dass gilt:

   $$(c\tau+d)^{-k-2r}(D^r f)(\gamma\tau) = \sum_{i=0}^{p+r} \left(\sum_{j=0}^{r} \frac{j!}{(2\pi i)^j} \binom{r}{j} \binom{k+r-i+j-1}{j} D^{r-j} f_{i-j}(\tau) \right) \left(\frac{c}{c\tau+d} \right)^i$$

   für alle $r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ und $\gamma \in \Gamma_1$. In der Vorlesung wurde der Fall $r = 1$ bereits gezeigt.

38. Die Schwarzsche Ableitung.
   Sei $y(x)$ eine nicht-konstante Funktion von $x \in \mathbb{C}$. Die Schwarzsche Ableitung von y bezüglich x ist

   $$\{y; x\} := \frac{2y'y''' - 3(y'')^2}{2(y')^2}.$$

   (a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass $\left\{ \frac{ay+b}{cy+d}; x \right\} = \{y; x\}$ für alle $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.

   (b) (2 Punkte) Sei $x(z)$ eine nicht-konstante Funktion von z. Zeigen Sie, dass

   $$\{y; z\} = \{x; z\} + \{y; x\} \left(\frac{dx}{dz} \right)^2.$$

39. Schwarzsche Differentialgleichung

   (a) (2 Punkte) Es seien ω_1 und ω_2 die Periodenintegrale aus Aufgabe 31. Definieren Sie $\tau(\lambda) = \frac{\omega_1(\lambda)}{\omega_2(\lambda)}$. Sei $\lambda(\tau)$ die Umkehrfunktion von $\tau(\lambda)$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\{\lambda; \tau\} + \frac{\lambda^2 - \lambda + 1}{2\lambda^2(1-\lambda)^2}(D\lambda)^2 = 0.$$

   (b) (2 Punkte) Drücken Sie $\lambda(\tau)$ als rationale Funktion von $j(\tau)$ aus.

40. Lineare Differentialgleichung für E_4

   (a) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass $E_4(\tau) = {}_2F_1\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}; 1; t(\tau)\right)^4$, wobei $t(\tau) = \frac{1728}{j(\tau)}$. Betrachten Sie dazu $E_4^{\frac{1}{4}}$ und zeigen Sie, dass beide Seiten dieselbe Differentialgleichung erfüllen.

   (b) (1 Punkt) Bestimmen Sie den linearen Differentialoperator 5. Ordnung, der $E_4(\tau)$ annihiliert.

Abgabetermin: Dienstag, 16.1.2018 um 10:00 Uhr.